

Radon isometry theorem for sheaves

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻

瀧脇 迪哲 (Michiaki TAKIWAKI) *

概要

1-パラメータパーシステンス加群はデータ解析の道具のひとつとして様々な分野に応用されている。一方でマルチパラメータパーシステンス加群に対しては理論的な研究は不十分であり、現在も盛んに行われている。ゆえにその応用はほとんどない。層理論はパーシステンス加群の性質を明らかにし、応用のためのマルチパラメータパーシステンス加群の特徴量を与えてくれることが期待されている。しかし、2次元以上のユークリッド空間上の層のなす圏は1次元のそれと比較して複雑な構造を持っている。そこで次元を削減するための手段として層のラドン変換というものを紹介したい。これは $\mathbb{R}^n$ 上の層のなす圏の有界な導来圏を局所化したものと $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ 上のそれとの間の圏同値を導くことが知られている。

本研究では $\mathbb{R}^n$ 上の層の有界な導来圏で定義された畳み込み距離、および $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ 上の有界な導来圏で定義されたインターリーピング距離と呼ばれる拡張擬距離を局所化された圏の上で改めて定義を行った。さらにラドン変換が $\mathbb{R}^n$ 上の層の多方向的な動きを1方向的な動きに変換することを利用して局所化された圏の上の拡張擬距離たちに関して等長的に振る舞うことを示した。

1 導入

1-パラメータパーシステンス加群はデータ解析の道具のひとつとして様々な分野で応用されている一方で、マルチパラメータの場合の応用は多くはない。そのためマルチパラメータパーシステンス加群の研究には、実社会のデータを記述できる扱いやすい特徴量が求められている。パーシステンス加群に関する理論研究では別の数学的な対象と結びつけることでそのような特徴量を見出す試みが行われてきた。

例えば層理論はパーシステンス加群の理論に類似した分野のひとつである。両者には密接な関係があり、最初に Curry [Cur14] が半順序集合 $\mathcal{P}$ に対して $\mathcal{P}$ 上のパーシステンス加群のなす圏と $\mathcal{P}$ に対してアレクサンドロフ位相 (半順序によって定まる位相、詳細は [Cur14, Definition 4.2.2] を参照されたい) を与えた空間 $\mathcal{P}_a$ 上の層のなす圏 $\mathrm{Sh}(\mathcal{P}_a)$ の間の圏同値を発見した。その後柏原と Schapira [KS18] はユークリッド位相の与えられたベクトル空間 $\mathbb{V}$ に含まれる (良い) 条件を満たした錐 γ によって $\mathbb{V}$ に半順序構造を与え、 $\mathrm{Sh}(\mathbb{V}_a)$ から $\mathbb{V}$ 上の層の充満部分圏のひとつである γ -層のなす圏 $\mathrm{Sh}(\mathbb{V}_\gamma)$ への関手を定めた。さらに Berkouk と Petit [BP21] は $\mathrm{Sh}(\mathbb{V}_a)$ を ephemeral 加群 (詳しくは [BP21, Definition 3.4] を参照されたい) のなす充満部分圏を用いて局所化した圏と $\mathrm{Sh}(\mathbb{V}_\gamma)$ が圏同値になることを示した。これらの圏同値によりパーシステンス加群の問題を層の問題に置き換

* E-mail: takiwaki.michiaki.87m@st.kyoto-u.ac.jp

えることができる. 特にマルチパラメータパーシステンス加群は $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 上の層に対応させることができる.

しかしながら, $\mathbb{R}^n$ 上の層の有界な導来圏 $D^b(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}$ のそれと比較して複雑な構造を持つことが知られている. 例えば $\mathbb{R}$ 上の構成可能層は分解定理が存在する (詳しくは [KS18, Proposition 2.17.], [Gui16, Corollary 7.3.]などを参照されたい) が, $\mathbb{R}^n$ 上の構成可能層には同様の分解定理があるかはわからない. 柏原と Schapira [KS18] は畳み込み双関手と呼ばれる双関手 $(-) * (-) : D^b(\mathbb{V}) \times D^b(\mathbb{V}) \rightarrow D^b(\mathbb{V})$ を定義した. 彼らは $a \in \mathbb{R}$ に対して $D^b(\mathbb{V})$ 上の層 K_a を構成し, 関手 $K_a * (-)$ を用いて畳み込み距離 d_C (詳しくは定義 2.9 で定義する) を $D^b(\mathbb{V})$ 上に定めた. 正確にはこの畳み込み距離というのは拡張擬距離であり, 特に $F, G \in D^b(\mathbb{V})$ に対して $d_C(F, G) = 0$ であることと $F \simeq G$ が同値であることは非自明である. ここで F と G が $D^b(\mathbb{R})$ 上の構成可能層であるときは分解定理によって d_C が距離の公理を満たすことを示すことができる. 詳しくは [BG22, Theorem 6.3.] を参照されたい. しかし $D^b(\mathbb{R}^n)$ の場合はより強い条件が必要となる.

このような $D^b(\mathbb{R}^n)$ にまつわる問題を解決するには何かしらの次元を削減する手法が有効だと推測される. そこで本研究では層のラドン変換に焦点を当てた. これは $\mathbb{R}^n$ 上の層の導来圏から $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ 上の層の導来圏への関手である. ラドン変換はこれらの圏を局所化したものたちの間の圏同値を導くことが知られている. この圏同値によりラドン変換は $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ の層の複体からある意味で定数層分のずれを除いて $D^b(\mathbb{R}^n)$ の層の複体を復元することができる. 詳しくは [Gao17, Definition 3.1.] を参照されたい.

本研究ではラドン変換に関する等長定理の証明を行なった. まず $D^b(\mathbb{R}^n)$ および $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ でそれぞれ定義された畳み込み距離 d_C およびインターリービング距離 d_I を新たな拡張擬距離 d_{LC} および d_{LI} として 2 つの圏を局所化した圏の上に定義しなおした. ここで d_I は $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ 上の拡張擬距離のひとつで, 畳み込み距離 d_C の類似物である. 詳しくは定義 2.11 で定義する. そして本研究における主定理が次の d_{LC} と d_{LI} に関する等長定理である.

定理 1.1. ラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ は局所化された畳み込みとインターリービング距離の間の等長関手を導く:

$$\Phi_{\mathbf{k}_A} : (D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n), d_{LC}) \rightarrow (D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R})), d_{LI}). \quad (1.1)$$

すなわち, 任意の $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ に対して, $d_{LC}(F, G) = d_{LI}(\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G))$ が成り立つ.

この定理は前述の畳み込み距離が距離の公理を満足するか否かを調べるのに有効な道具であると期待している. 畳み込み双関手は $\mathbb{V}$ 上の層の複体を変形させる作用と見ることができる. 特に畳み込み距離の定義に必要な関手 $K_a * (-)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の層に多方向的な動きを与える. もし $K_a * (-)$ の振る舞いが畳み込み距離の内在的な難しさを引き起こしているならば, ラドン変換はその問題を解決する強力な道具となるはずだ. その理由はラドン変換は多方向的な動きを 1 方向的な動きに等長的に変えることができるからである. このことについては主定理の証明を与えた後に例を交えながら説明したい.

2 準備

以降 n を 2 以上の整数, $\mathbf{k}$ を体, X, Y を滑らかな有限次元実多様体とする. $D^b(X)$ を X 上の層の有界な導来圏とする. 煩雑な説明を避けるため, 特に断りを入れなければ層は $\mathbf{k}$ -ベクトル空間に値をとる層を考える. 多様体 X 上の層のなす圏 $\text{Sh}(X)$ は $D^b(X)$ の部分圏とみなすことができる. また層の複体 $F \in D^b(X)$ を単に層と呼ぶ. 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ は層の導来圏の間の関手 $Rf_! : D^b(X) \rightarrow D^b(Y), f^{-1} : D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$ を導く. また $D^b(X)$ にはテンソル $\otimes$ が定義できる. 多様体 X の局所閉集合 Z に対して Z 上の定数層の零拡張を $\mathbf{k}_Z \in D^b(X)$ と書く. ここで紹介した $Rf_!, f^{-1}$ や $\mathbf{k}_Z$ などの記号の詳細は [KS90, Section.2] を参照されたい. また導来圏や三角圏などの用語も出てくるがこれらは [KS90, Section.1] を参照されたい.

2.1 合成と畳み込み

この節では層の 2 つの演算として合成 ($\circ$) と畳み込み ($*$) について解説する. それぞれ関数の積分変換や畳み込みといった馴染みある作用の類似物である.

定義 2.1. 2 つの射影 $p_1 : X \times Y \rightarrow X, p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ および層 $K \in D^b(X \times Y)$ に対して関手 Φ_K を

$$\Phi_K : D^b(Y) \rightarrow D^b(X); \Phi_K(F) = Rp_{1!}(K \otimes p_2^{-1}F) \quad (2.1)$$

で定める. また $\Phi_K(F)$ を $K \circ F$ とかくことがあり, これを K と F の**合成**と呼ぶ.

この関手は関数に対する積分変換に相当する. すなわち X_2 上の関数 f に対して核 k による積分変換

$$(Tf)(x_1) = \int_{X_2} k(x_1, x_2)f(x_2)dx_2$$

の類似物であり, $K \in D^b(X \times Y)$ は核に相当する層である.

例 2.2. 部分集合 $A = \{(y, t, x) \in S^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; x \cdot y \leq t\}$ を考える. $x \cdot y$ は $x \in \mathbb{R}^n$ と $y \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ のユークリッド空間における標準的な内積を表す. 層 $\mathbf{k}_A \in D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ が定める関手 $\Phi_{\mathbf{k}_A} : D^b(\mathbb{R}^n) \rightarrow D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ を層の**ラドン変換**と呼ぶ.

このラドン変換が局所化された圏の間の圏同値を導くことを説明する. まずは局所化について説明したい. そのために層のマイクロ台と呼ばれる余接束の部分集合が必要となる. 層 $F \in D^b(X)$ に対してマイクロ台 $\text{SS}(F) \subset T^*X$ は通常の意味での台 $\text{supp}(F) \subset X$ を拡張した集合である. マイクロ台はある意味で層の形を与える集合とみなせる. 詳しくは [KS90, Definition 5.1.2.] を参照されたい.

余接束 T^*X の部分集合 $V \subset T^*X$ に対して $D^b(X)$ の充満部分圏 $D_V^b(X)$ を $\text{SS}(F) \subset V$ を満たす $F \in D^b(X)$ からなる圏とする. このとき $D_V^b(X)$ は $D^b(X)$ の三角部分圏となる.

定義 2.3. [KS90, Definition 6.1.1.] 余接束 T^*X の部分集合 $\Omega \subset T^*X$ に対して

$$D^b(X; \Omega) := D^b(X) / D_{T^*X \setminus \Omega}^b(X)$$

で定める. すなわち $F, G \in D^b(X; \Omega)$ に対して $F \simeq G$ であることと, ある $H \in D^b(X)$ と $D^b(X)$ における三角形 $F \rightarrow G \rightarrow H \xrightarrow{\pm 1}$ が存在して $\text{SS}(H) \subset T^*X \setminus \Omega$ および $F \rightarrow G \rightarrow H \xrightarrow{\pm 1}$ が $D^b(X)$ における完全三角形となることは同値である.

例 2.4. 余接束 $T^*\mathbb{R}^n$ の部分集合を $\dot{T}^*\mathbb{R}^n = T^*\mathbb{R}^n \setminus 0_{\mathbb{R}^n}$ で定める. ここで $0_{\mathbb{R}^n}$ は余接束 $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の零切断である. 定数層 $L_{\mathbb{R}^n} \in D^b(\mathbb{R}^n)$ に対して $D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ の同型射 $L_{\mathbb{R}^n} \simeq 0$ が存在する.

定理 2.5. [Gao17, Theorem 3.3.] ラドン変換は局所化された層のなす圏の間の圏同値

$$\Phi_{\mathbf{k}_A} : D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n) \rightarrow D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R})) \quad (2.2)$$

を導く. ここで $T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ および $T^{*,+}\mathbb{R}$ を $T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R}) := T^*S^{n-1} \times T^{*,+}\mathbb{R}$, $T^{*,+}\mathbb{R} := \{(t; \tau) \in T^*\mathbb{R}; \tau > 0\}$ とおいた.

次に畳み込みの定義を紹介する. これは関数に対する畳み込みを, ベクトル空間 $\mathbb{V}$ 上の層の演算として書き換えたものになる.

定義 2.6. 線形写像 $q_1, q_2, s : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ を次で定める:

$$q_1(v_1, v_2) = v_1, \quad q_2(v_1, v_2) = v_2, \quad s(v_1, v_2) = v_1 + v_2. \quad (2.3)$$

このとき 2 つの層 $F, G \in D^b(\mathbb{V})$ に対して $F * G := R_{s!}(q_1^{-1}F \otimes q_2^{-1}G)$ と定める. 双関手 $(-) * (-) : D^b(\mathbb{V}) \times D^b(\mathbb{V}) \rightarrow D^b(\mathbb{V})$ を **畳み込み** 双関手と呼ぶ.

ここまで登場した合成と畳み込みによく似た別の層の演算を紹介する. M を多様体とする.

定義 2.7. 2 つの射影 $\tilde{p}_1 : M \times X \times Y \rightarrow M \times X, \tilde{p}_2 : M \times X \times Y \rightarrow M \times Y$ に対して, 2 つの層 $K \in D^b(M \times X \times Y)$ と $F \in D^b(M \times Y)$ の合成を

$$K \circ F := R_{\tilde{p}_1!}(K \otimes \tilde{p}_2^{-1}F) \quad (2.4)$$

で定める.

定義 2.8. 線形写像 $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{s} : M \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow M \times \mathbb{V}$ を次で定める:

$$\tilde{q}_1(x, v_1, v_2) = (x, v_1), \quad \tilde{q}_2(x, v_1, v_2) = (x, v_2), \quad \tilde{s}(x, v_1, v_2) = (x, v_1 + v_2). \quad (2.5)$$

このとき 2 つの層 $F, G \in D^b(M \times \mathbb{V})$ に対して $F \tilde{*} G := R_{\tilde{s}!}(\tilde{q}_1^{-1}F \otimes \tilde{q}_2^{-1}G)$ と定める.

2.2 拡張擬距離

この節では $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ をノルム付き有限次元実ベクトル空間とする. 実数 $a \geq 0$ に対して閉球体 B_a を $B_a := \{x \in \mathbb{V}; \|x\| \leq a\}$ で定める. 層 $K_a \in D^b(\mathbb{V})$ を $K_a := \mathbf{k}_{B_a}$ とおくと, 別の層 $F \in D^b(\mathbb{V})$ と K_a の畳み込みを行うことで F の台を変形させることができる. これは関数に対する通常の畳み込みと似た振る舞いをしていると考えられる. すなわちコンパクト台を持つ関数 f と B_a を台に持つ指示関数 1_{B_a} の畳み込みを行なった関数 $f * 1_{B_a}$ に対して, a が大きくなるにつれ, その台がだん

だんと大きくなる．これと似たような振る舞いが層の畳み込みでも起こることが知られており，関手 $K_a * (-)$ によって $D^b(\mathbb{V})$ 上に拡張擬距離を定めることができる．

定義 2.9. (i) 2つの層 $F, G \in D^b(\mathbb{V})$ および $a \geq 0$ に対して，2つの層の間の射 $f : K_a * F \rightarrow G$ および $g : K_a * G \rightarrow F$ であって2つの図式

$$\begin{array}{ccc} K_{2a} * F & \xrightarrow{\chi_{2a,0}^K * F} & K_0 * F \simeq F \\ & \searrow K_a * f & \nearrow g \\ & K_a * G, & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & K_a * F & \\ K_{2a} * G & \xrightarrow{\chi_{2a,0}^K * G} & K_0 * G \simeq G \\ & \nearrow K_a * g & \searrow f \end{array} \quad (2.6)$$

を可換にすると， F, G が a -インターリーブであるという．ここで $\chi_{2a,0}^K * F$ は制限写像から定まる層の間の射 $\chi_{2a,0}^K : K_{2a} \rightarrow K_0$ が導く射である．射の組 (f, g) を a -インターリーブングと呼ぶ．

(ii) 2つの層 $F, G \in D^b(\mathbb{V})$ に対して F と G の間の畳み込み距離を

$$d_C(F, G) := \inf(\{a \geq 0; F \text{ と } G \text{ が } a\text{-インターリーブ}\} \cup \{\infty\}) \quad (2.7)$$

で定める．

補足 2.10. 畳み込み距離は拡張擬距離である．すなわち d_C は $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ に値をとる $D^b(\mathbb{V}) \times D^b(\mathbb{V})$ 上の関数であり， $F, G, H \in D^b(\mathbb{V})$ に対して次の3つの条件を満たす：

- (i) $d_C(F, F) = 0$,
- (ii) $d_C(F, G) = d_C(G, F)$,
- (iii) $d_C(F, H) \leq d_C(F, G) + d_C(G, H)$.

一方で $d_C(F, G) = 0$ のとき， $F \simeq G$ が成り立つとは限らない．実際，Berkouk と Ginot [BG22] は $\mathbb{R}$ 上の層 F, G であって $d_C(F, G) = 0$ と $F \not\simeq G$ を満たすものを与えた．

次に $D^b(M \times \mathbb{V})$ 上に拡張擬距離を定義する．実数 $a \geq 0$ に対して $L_a := \mathbf{k}_{M \times B_a} \in D^b(M \times \mathbb{V})$ と定める．

定義 2.11. (i) 2つの層 $F, G \in D^b(M \times \mathbb{V})$ および $a \geq 0$ に対して，2つの層の間の射 $f : L_a \tilde{*} F \rightarrow G$ および $g : L_a \tilde{*} G \rightarrow F$ であって2つの図式

$$\begin{array}{ccc} L_{2a} \tilde{*} F & \xrightarrow{\chi_{2a,0}^L \tilde{*} F} & L_0 \tilde{*} F \simeq F \\ & \searrow L_a \tilde{*} f & \nearrow g \\ & L_a \tilde{*} G, & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & L_a \tilde{*} F & \\ L_{2a} \tilde{*} G & \xrightarrow{\chi_{2a,0}^L \tilde{*} G} & L_0 \tilde{*} G \simeq G \\ & \nearrow L_a \tilde{*} g & \searrow f \end{array} \quad (2.8)$$

を可換にすると， F, G が a -インターリーブであるという．ここで $\chi_{2a,0}^L \tilde{*} F$ は制限写像から定まる層の間の射 $\chi_{2a,0}^L : L_{2a} \rightarrow L_0$ が導く射である．射の組 (f, g) を a -インターリーブングと呼ぶ．

(ii) 2つの層 $F, G \in D^b(M \times \mathbb{V})$ に対して F と G の間のインターリービング距離を

$$d_I(F, G) := \inf(\{a \geq 0; F \text{ と } G \text{ が } a\text{-インターリーブ}\} \cup \{\infty\}) \quad (2.9)$$

で定める.

これらの拡張擬距離は畳み込みによって定まる関手 $K_a * (-)$ および $L_a \tilde{*} (-)$ を用いて定義された. これらの関手は合成を用いても記述できる.

命題 2.12. [PS23, Proposition 2.1.10] 実数 $a \geq 0$ に対して $\Delta_a = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}; \|v_1 - v_2\| \leq a\}$ と定める. このとき関手の間の同型

$$\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ (-) \simeq K_a * (-) \quad (2.10)$$

が存在する.

命題 2.13. 実数 $a \geq 0$ に対して $Z_a = \{(x, v_1, v_2) \in M \times \mathbb{V} \times \mathbb{V}; \|v_1 - v_2\| \leq a\}$ と定める. このとき関手の間の同型

$$\mathbf{k}_{Z_a} \circ (-) \simeq L_a \tilde{*} (-) \quad (2.11)$$

が存在する.

これまでの話により, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ の場合を考えると d_C は $D^b(\mathbb{R}^n)$ 上で定義された拡張擬距離となる. また $M \times \mathbb{V} = S^{n-1} \times \mathbb{R}$ の場合を考えると d_I は $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ 上で定義された拡張擬距離となる. これらの距離を局所化された圏 $D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$, $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R}))$ で定義し直す必要がある. そこで以下の命題を紹介しよう.

命題 2.14. [GS14, Corollary 4.14.] 2つの層 $F, G \in D^b(M \times \mathbb{V})$ に対して $SS(F) \subset T^*M \times \mathbb{V} \times A$ および $SS(G) \subset T^*M \times \mathbb{V} \times B$ を満たす閉錐 $A, B \subset \mathbb{V}^*$ が存在すると仮定する. このとき

$$SS(F \tilde{*} G) \subset T^*M \times \mathbb{V} \times (A \cap B) \quad (2.12)$$

が成り立つ.

$\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, M を一点からなる多様体とみなすと関手 $K_a * (-) : D^b(\mathbb{R}^n) \rightarrow D^b(\mathbb{R}^n)$ は $K_a * (-) : D^b(\mathbb{R}^n; \dot{T}^*\mathbb{R}^n) \rightarrow D^b(\mathbb{R}^n; \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ を誘導する. また $M \times \mathbb{V} = S^{n-1} \times \mathbb{R}$ とすると, 関手 $L_a \tilde{*} (-) : D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ は $L_a \tilde{*} (-) : D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R})) \rightarrow D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R}))$ を誘導する.

これにより $D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$, $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R}))$ にそれぞれ拡張擬距離を定義 2.9, 定義 2.11 と同様にして定めることができる. これらをそれぞれ局所化された畳み込み距離 d_{LC} , 局所化されたインターリービング距離 d_{LI} と表すことにする. 当然 a -インターリーブという言葉も局所化された圏にも定義できる.

3 主定理

本研究では以下の定理を証明した. すでに定理 1.1 として紹介したが改めてここに記す.

定理 3.1. ラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ は d_{LC} と d_{LI} の間の等長関手を導く.

$$\Phi_{\mathbf{k}_A} : (D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n), d_{LC}) \rightarrow (D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R})), d_{LI}). \quad (3.1)$$

すなわち, 任意の $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ に対して, $d_{LC}(F, G) = d_{LI}(\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G))$ が成り立つ.

3.1 主定理の証明

証明の流れは $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ の間の a -インターリーブがラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ で保たれることを確認すればよい. そのために以下の補題が必要である.

補題 3.2. 実数 $a \geq 0$ に対して $A_a := \{(y, t, x) \in S^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; x \cdot y \leq t + a\}$ と定める. 以下の層の同型射が存在する:

$$\mathbf{k}_A \circ \mathbf{k}_{\Delta_a} \simeq \mathbf{k}_{A_a} \simeq \mathbf{k}_{Z_a} \widetilde{\circ} \mathbf{k}_A \quad \text{in} \quad D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n). \quad (3.2)$$

定理 3.1 の証明 $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ として, F と G が a -インターリーブであると仮定する. $\Phi_{\mathbf{k}_A}(F)$ と $\Phi_{\mathbf{k}_A}(G)$ が a -インターリーブであることを示せば良い. ラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A} = \mathbf{k}_A \circ (-)$ を (2.6) に施す:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_{2a}} \circ F) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{k}_A \circ F \\ & \searrow \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ f) \quad \circ \quad \nearrow \mathbf{k}_A \circ g & \\ & \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ G), & \\ & \nearrow \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ g) \quad \circ \quad \searrow \mathbf{k}_A \circ f & \\ \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_{2a}} \circ G) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{k}_A \circ G. \end{array}$$

ここで $K_a * (-)$ は命題 2.12 によって $\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ (-)$ に書き換えた. さらに補題 3.2 を用いると

$$\mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ F) \simeq (\mathbf{k}_A \circ \mathbf{k}_{\Delta_a}) \circ F \simeq (\mathbf{k}_{Z_a} \widetilde{\circ} \mathbf{k}_A) \circ F \simeq \mathbf{k}_{Z_a} \widetilde{\circ} (\mathbf{k}_A \circ F).$$

が得られる. これにより先ほどの可換図式は以下のように書き換えることができる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_{Z_{2a}} \widetilde{\circ} (\mathbf{k}_A \circ F) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{k}_A \circ F \\ & \searrow \mathbf{k}_{Z_a} \widetilde{\circ} (\mathbf{k}_A \circ f) \quad \circ \quad \nearrow \mathbf{k}_A \circ g & \\ & \mathbf{k}_{Z_a} \widetilde{\circ} (\mathbf{k}_A \circ G), & \\ & \nearrow \mathbf{k}_{Z_a} \widetilde{\circ} (\mathbf{k}_A \circ g) \quad \circ \quad \searrow \mathbf{k}_A \circ f & \\ \mathbf{k}_{Z_{2a}} \widetilde{\circ} (\mathbf{k}_A \circ G) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{k}_A \circ G. \end{array}$$

以上より $\Phi_{\mathbf{k}_A}(F)$ と $\Phi_{\mathbf{k}_A}(G)$ が a -インターリーブであることが示せた. 特に不等式 $d_{LI}(\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G)) \leq d_{LC}(F, G)$ が成り立つ.

一方で $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が圏同値であることを用いると逆向きの不等式が示せる。まず a -インターリーブであるふたつの層を $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R}))$ からとる。これらの層は $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が稠密な (本質的に全射, essentially surjective という表現の方が馴染みがあるかもしれない) 関手であるから $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ によって $\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G)$ と表すことができる。 $\Phi_{\mathbf{k}_A}(F)$ と $\Phi_{\mathbf{k}_A}(G)$ が a -インターリーブであると仮定すると, $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が忠実充満であることから F と G の a -インターリーブを得る。したがって不等式 $d_{LI}(\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G)) \geq d_{LC}(F, G)$ が成り立つ。2つの不等式より $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が等長関手であることが示せた。 $\square$

3.2 例と予想の紹介

この節では d_C と d_I に関する非退化性の予想を紹介する。層に対する条件として構成可能という言葉が出てくるが, 詳しくは [KS90, Definition 8.4.3.] を参照してほしい。なおここまでは $\mathbf{k}$ -ベクトル空間に値をとる層のみを考えていたが, これから紹介する予想ではその場合に限らないものとする。次の予想は Guillermou と Viterbo [GV24] によって層の係数が体である場合は示されている。

予想 3.3. $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n)$ が構成可能層であるとする。ただし, これらの層の係数は体であるとは限らない。このとき $d_C(F, G) = 0$ ならば $F \simeq G$ が成り立つ。

ラドン変換は $K_a * (-)$ の多方向的な動きを $L_a \tilde{*} (-)$ の1方向的な動きに変えることができるので, $D^b(\mathbb{R}^n)$ 上の畳み込み距離 d_C の問題を $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ 上のインターリーブ距離 d_I を用いて説明できるのではないかという期待がある。このラドン変換による動きの変化を具体例を用いて説明する。

例 3.4. ここでは $\mathbb{R}^2$ 上の層を考える。 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 S, I, J, T をそれぞれ

$$\begin{aligned} S &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}, \\ I &:= \{(x_1, 1) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x_1 \leq 1\}, \\ J &:= \{(x_1, -1) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x_1 \leq 1\}, \\ T &:= I \sqcup J \end{aligned}$$

と定める。 $Z = S \setminus T$ と定めたとき導来圏 $D^b(\mathbb{R}^2)$ において次の完全三角形が存在する:

$$\mathbf{k}_Z \rightarrow \mathbf{k}_S \rightarrow \mathbf{k}_I \oplus \mathbf{k}_J \xrightarrow{+1}. \quad (3.3)$$

ここで $\mathbf{k}_T \simeq \mathbf{k}_I \oplus \mathbf{k}_J$ であることに注意する。実数 $a \geq 0$ に対して $S_a := S + B_a = \{x + x' \in \mathbb{R}^2; x \in S, x' \in B_a\}$ と定める。ここで B_a は $\mathbb{R}^2$ における閉球体と定めていた。同様に $I_a := I + B_a, J_a := J + B_a$ とし, さらに次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 T_a, Z'_a, Z''_a をそれぞれ

$$T_a := I_a \cup J_a, \quad Z'_a := S_a \setminus T_a, \quad Z''_a := I_a \cap J_a$$

と定める。完全三角形 (3.3) に $K_a * (-)$ を施すと図1の完全三角形を得る。

これにより

$$H^0(K_a * \mathbf{k}_Z) \simeq \mathbf{k}_{Z'_a}, \quad H^1(K_a * \mathbf{k}_Z) \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq a < 1, \\ \mathbf{k}_{Z''_a} & \text{if } 1 \leq a \end{cases}$$

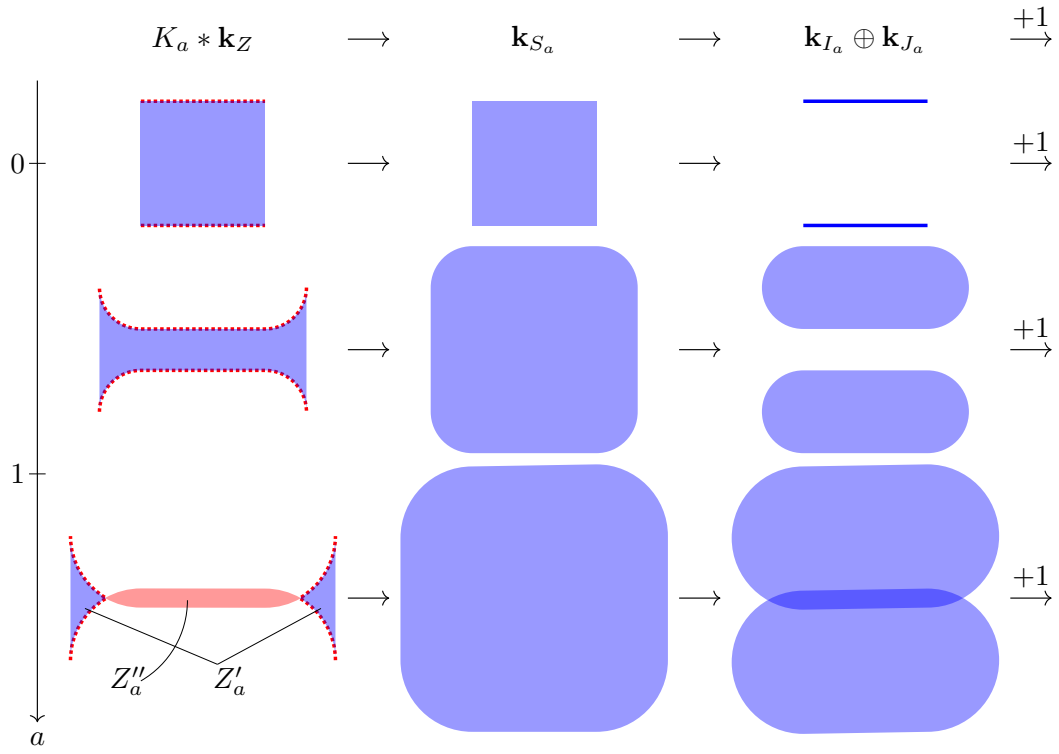


図1 完全三角形 (3.3) に $K_a * (-)$ を施すことで $D^b(\mathbb{R}^2)$ の完全三角形を得る.

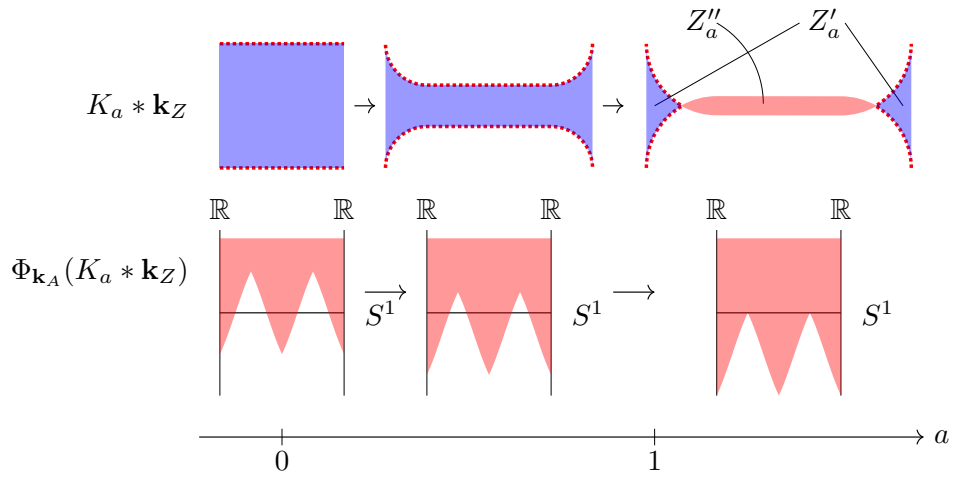


図2 各 $a \geq 0$ に対して上の図たちは Z'_a または $Z'_a \cup Z''_a$ を表し、下の図たちは $\{(y, t) \in S^1 \times \mathbb{R}; \varphi(y) \leq t + a\}$ を表す. ここで S^1 は $\mathbb{R}$ の閉区間 $[0, 1]$ を端点 $\{0, 1\}$ で同一視した空間であるので, $\{(y, t) \in S^1 \times \mathbb{R}; \varphi(y) \leq t + a\}$ は $[0, 1] \times \mathbb{R}$ の部分集合として表した.

となる.

ラドン変換を施すことにより $\Phi_{\mathbf{k}_A}(K_a * \mathbf{k}_Z)$ は $K_a * \mathbf{k}_Z$ よりもわかりやすい層へ変化する. 任意の $a \geq 0$ に対して, ある連続関数 $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\Phi_{\mathbf{k}_A}(K_a * \mathbf{k}_Z) \simeq \mathbf{k}_{\{(y,t) \in S^1 \times \mathbb{R}; \varphi(y) \leq t+a\}}[-1]$ と書けることが完全三角形を用いた計算からわかる.

実数 $a \geq 0$ が増加するにつれ, Z'_a はふたつの連結成分を持つようになり, $K_a * \mathbf{k}_Z$ は 0 次のみならず 1 次のコホモロジーが出現する. 一方で, $\{(y,t) \in S^1 \times \mathbb{R}; \varphi(y) \leq t+a\}$ は単に $\mathbb{R}$ 方向に伸びていくだけである. これは補題 3.2 により, ラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が関手 $K_a * (-)$ による動きを $L_a \widetilde{*} (-)$ による簡単な動きに変えることができることに起因する.

本研究の主結果である定理 3.1 により, 先ほどの予想 3.3 から新たな予想を得る.

予想 3.5. $F, G \in D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ が構成可能層であるとする. ただし, これらの層の係数は体であるとは限らない. このとき $d_I(F, G) = 0$ ならば $F \simeq G$ が成り立つ.

関手 $L_a \widetilde{*} (-)$ は $K_a * (-)$ よりも簡単な動きを与えるので, こちらの方が容易に解決できるかもしれない.

参考文献

- [BG22] Nicolas Berkouk and Grégory Ginot. *A derived isometry theorem for sheaves*. Advances in Mathematics. 394, 108033. 2022.
- [BP21] Nicolas Berkouk, François Petit. *Ephemeral persistence modules and distance comparison*. Algebraic & Geometric topology, volume 21. pages 247–277. 2021.
- [Cur14] Justin Michael Curry. *Sheaves, Cosheaves and applications*. Ph.D. thesis. University of Pennsylvania. 2014.
- [Gao17] Honghao Gao. *Radon Transform for Sheaves*. Available at arXiv:1712.06453v2 [math.SG].
- [Gui16] Stéphane Guillermou. *The three cusps conjecture*. Available at arXiv:1603.07876v1 [math.SG].
- [GS14] Stéphane Guillermou, Pierre Schapira. *Microlocal Theory of Sheaves and Tamarkin's Non Displaceability Theorem*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer. pages 43–85. 2014.
- [GV24] Stéphane Guillermou, Claude Viterbo. *The singular support of sheaves is γ -isotropic*. Geometric and functional analysis, Volume 34. pages 1052–1113. 2024.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 292. Springer-Verlag, Berlin. 1990.
- [KS18] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira. *Persistent homology and microlocal sheaf theory*. Journal of Applied and Computational Topology, Volume 2. pages 83–113. 2018.
- [PS23] François Petit, Pierre Schapira. *Thickening of the diagonal and interleaving distance*. Selecta Mathematica, Volume 29. No. 70. 2023.